К теории механических колебаний

Y.G.Koyfman (Los Angeles),
A.Y.Koyfman (Santa Barbara)

Нельзя честно объяснить все красоты законов природы так, чтобы люди воспринимали их одними чувствами, без глубокого понимания математики. Как ни прискорбно, но, по-видимому, это факт.

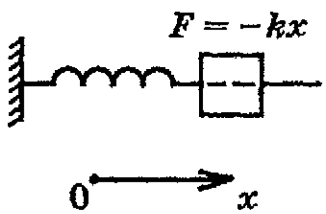
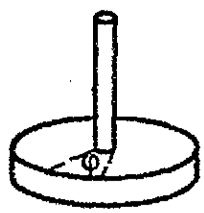
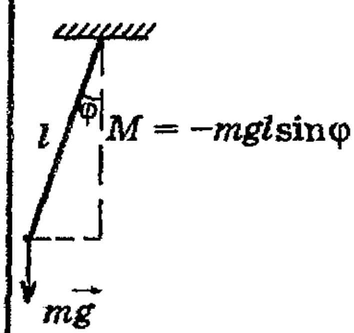
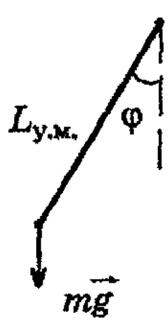
Р.Фейнман

В толковом словаре В.Даля понятие колебать означает: качать, шатать, колыхать, волновать, клонить туда-сюда, раскачивать. Действительно, движение "туда-обратно", в частности, периодичность, повторяемость – признаки колебаний. Сюда относятся, например, восход и заход солнца, биение сердца, дрожание струн в музыкальных инструментах или голосовых связок при пении, колебание автомобиля на неровной дороге, вращение ротора электромашины, переменный ток в электрическом контуре, движение электронного пучка по экрану осциллографа и т.п.

Эта внешняя схожесть различного типа колебаний позволяет построить теорию, в равной степени применимую как к механическим, так и к электрическим колебаниям. Совершенно очевидно также, что уравнения колебательных процессов и их решения в известной мере универсальны, иными словами, если мы знаем теорию механических колебаний, то сможем проанализировать аналогичные математические модели электрических систем.

В различных пособиях достаточно полно и подробно рассматриваются примеры колебательных систем. Как правило, таковыми являются: нитяной (математический) маятник, пружинный маятник, физический маятник, крутильный диск.

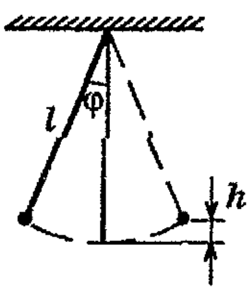
Таблица, приведенная ниже, является своего рода обобщением различных видов колебательных процессов.

Колебательная система	Рисунок	Математическое описание	Период
Пружинный маятник		$\sum\vec{F} = m\vec{a}$ $-kx = ma$ $a = -\frac{k}{m}x$ $x'' = -\frac{k}{m}x$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Крутильный диск	 $M = -k\varphi$	$\sum M = I\varphi''$ $-k\varphi = I\varphi''$ $\varphi'' = -\frac{k}{I}\varphi$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$
Математический маятник		$\sum M = I\varphi''$ $-mgl\sin\varphi = ml^2\varphi''$ Для малых углов $\sin\varphi \approx \varphi$ $\varphi'' = -\frac{g}{l}\varphi$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Физический маятник	 $M = -mgL_{у.м.}\sin\varphi$	$\sum M = I\varphi''$ $-mgL_{у.м.}\sin\varphi = I\varphi''$ $\sin\varphi \approx \varphi$ $\varphi'' = -\frac{mgL_{у.м.}}{I}\varphi$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL_{у.м.}}{I}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL_{у.м.}}}$

Сравнивая уравнения движения, нетрудно заметить, что математически они эквивалентны. Таким образом, задача рассмотрения колебательных механических систем сводится к одному дифференциальному уравнению типа

$$\begin{aligned} x'' &= -\omega_0^2 x, \\ \varphi'' &= -\omega_0^2 \varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

При получении соотношения (1) был использован так называемый динамический подход, поскольку мы применили законы Ньютона и уравнение вращательного движения.



Рассмотрим также "энергетический подход" для вывода соотношения типа (1). В любой момент времени сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}. \tag{2}$$

Выражение для высоты тела нитяного маятника выглядит так:

$$h = l(1 - \cos\varphi). \tag{3}$$

Из тригонометрии известно, что

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{4}$$

Для малых колебаний заметим, что $\sin\gamma \approx \gamma$

$$\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}; \quad 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi^2}{2}. \tag{5}$$

Перепишем еще раз закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgl\frac{\varphi^2}{2} = \text{const}. \tag{6}$$

Упростим соотношение (6)

$$v^2 + gl\varphi^2 = \text{const}. \tag{7}$$

Учитывая, что $\varphi \cdot l = x$, получим

$$v^2 + \frac{g}{l}x^2 = \text{const}. \qquad (8)$$

Возьмем производную по времени

$$(v^2 + \frac{g}{l}x^2)' = 0, \qquad (9)$$

$$2vv' + \frac{g}{l}2x \cdot x' = 0. \qquad (10)$$

Учитывая, что $x' = v$; $v' = a$, получим

$$2va + \frac{g}{l}2xv = 0. \qquad (11)$$

Выражение (11) позволяет найти уравнение движения

$$a = -\frac{g}{l}x \text{ или } x'' = -\frac{g}{l}x. \qquad (12)$$

Аналогичные рассуждения нетрудно повторить и для случая пружинного маятника, в результате чего получим:

$$x'' = -\frac{k}{m}x. \qquad (13)$$

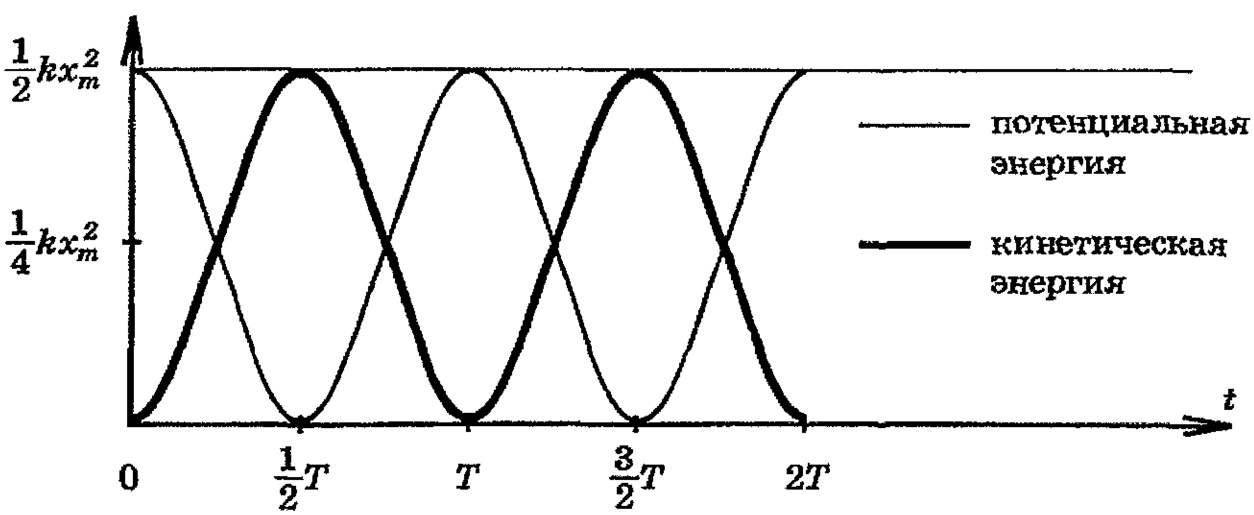
Решения уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$x = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (14)$$

$$x = x_m\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (15)$$

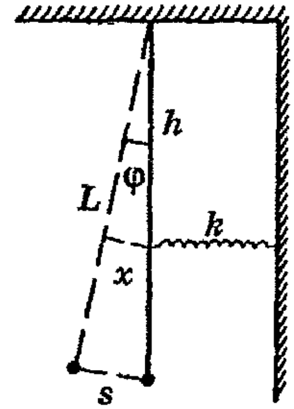
"Синусоидальность" выражений (14)–(15) позволяет назвать уравнение (1) "гармоническим уравнением".

Очень удобным является графическое представление энергии колебательного процесса от времени (при $\varphi_0 = 0$):



Целью данной работы является представление решений различных задач, используя как "энергетический", так и "динамический" метод описания колебательных процессов.

1. Определите циклическую частоту системы: шарик массой m находится на конце тонкого стержня длиной L и ничтожно малой массы (математический маятник), на расстоянии h к стержню прикреплена дополнительная пружина жесткостью k (МФТИ).



а) "Энергетическое" решение: в любой момент времени сумма потенциальной и кинетической энергии остается неизменной:

$$\frac{kx^2}{2} + mgL(1 - \cos\varphi) + \frac{mv^2}{2} = \text{const}, \tag{1.1}$$

x – величина смещения пружины

$$x \approx h \cdot \varphi, \tag{1.2}$$

s – длина дуги, описываемой при колебаниях телом массой m

$$s = L \cdot \varphi. \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) и (1.3) перепишем закон сохранения энергии ($\sin\varphi \approx \varphi$)

$$\frac{kh^2\varphi^2}{2} + mgL\frac{\varphi^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \text{const},$$

$$\frac{kh^2L^2\varphi^2}{2L^2} + \frac{mgL^2\varphi^2}{2L} + \frac{mv^2}{2} = \text{const},$$

$$\frac{kh^2s^2}{2L^2} + \frac{mgs^2}{2L} + \frac{mv^2}{2} = \text{const}. \tag{1.4}$$

Производная по времени позволяет получить уравнение движения

$$a = -\left(\frac{mgL + kh^2}{mL^2}\right) \cdot s. \tag{1.5}$$

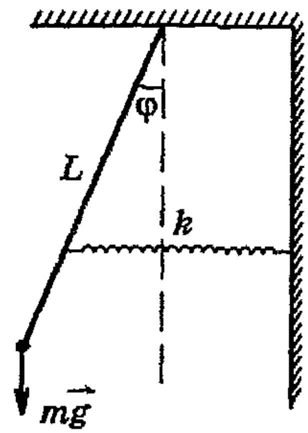
Определим циклическую частоту колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL + kh^2}{mL^2}}. \tag{1.6}$$

б) "Динамическое" решение. Применим основное уравнение динамики вращательного движения

$$\varphi'' = \frac{M}{I}. \tag{1.7}$$

Здесь M – момент силы, а I – момент инерции, φ'' – угловое ускорение. Применяя (1.7) для нашего случая, получим



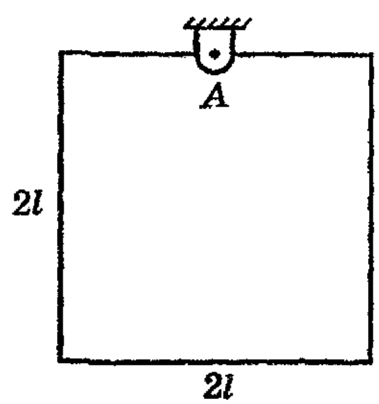
$$-(mgL\sin\varphi + kxh\cos\varphi) = I\varphi''. \tag{1.8}$$

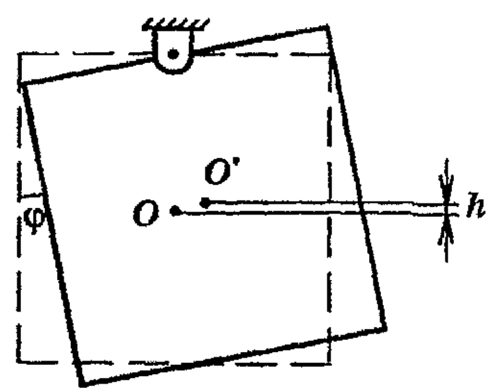
Учитывая малость углов $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ и то, что $x \approx h\cdot\varphi$ (момент инерции равен $I = mL^2$), получим уравнение движения

$$\varphi'' = -\left(\frac{mgL + kh^2}{mL^2}\right)\varphi. \tag{1.9}$$

Выражение для уравнения движения такое же, как и в первом случае (1.5).

2. Плоский квадрат $2l \times 2l$ подвешен в точке A. Пренебрегая толщиной, определите период колебаний.





а) Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh = \text{const}. \qquad (2.1)$$

Здесь I – момент инерции квадрата, $I = \frac{2}{3}ml^2$; $h = l(1 - \cos\varphi)$.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}ml^2\right)\omega^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \text{const}. \qquad (2.2)$$

Преобразуем соотношение (2.2) с учетом $v = \omega l$, $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ и $\sin\varphi \approx \varphi$ при малых углах.

$$\frac{5}{6}ml^2\omega^2 + mgl\frac{\varphi^2}{2} = \text{const}. \qquad (2.3)$$

Производная по времени позволяет получить, что

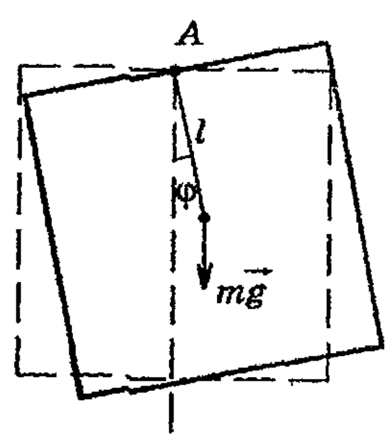
$$\varphi'' = -\frac{3g}{5l}\varphi. \qquad (2.4)$$

Найдем из выражения (2.4) циклическую частоту и период колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{5l}}, \qquad (2.5)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{3g}}. \qquad (2.6)$$

б) Применим уравнение динамики вращательного движения. Здесь необходимо использовать теорему Штейнера, поскольку рассмотрение ведется относительно точки A.



$$\varphi'' = -\frac{mgl\sin\varphi}{I}. \qquad (2.7)$$

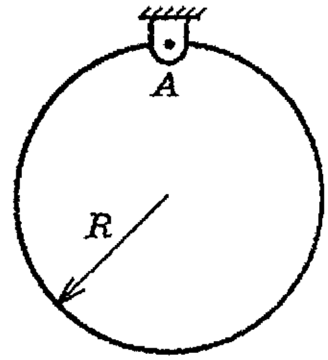
Здесь $$I = \frac{2}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{5}{3}ml^2. \qquad (2.8)$$

Из-за малости угла φ $\sin\varphi \approx \varphi$, а значит, (2.8) имеет вид

$$\varphi'' = -\frac{3g}{5l}\varphi. \qquad (2.9)$$

Таким образом, циклическая частота и период колебаний имеют такой же вид, как и в "энергетическом" решении.

3. Определите период колебаний тонкого кольца радиусом R относительно точки A.



а) Запишем закон сохранения энергии относительно центра кольца в положении равновесия

$$mgR(1 - \cos\varphi) + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \text{const}, \qquad (3.1)$$

I – момент инерции, $I = mR^2$. Учитывая связь между угловой и линейной скоростями, а также малость угла φ, преобразуем (3.1):

$$mgR\frac{\varphi^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \text{const}.$$

$$g\varphi^2 + 2R\omega^2 = \text{const}. \qquad (3.2)$$

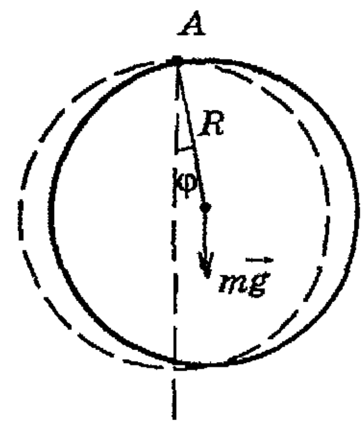
Производная по времени от соотношения (3.2) приводит к уравнению движения

$$\varphi'' = -\frac{g}{2R}\varphi. \qquad (3.3)$$

Теперь уже нет никакого труда найти циклическую частоту и период колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}}, \qquad (3.4)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \qquad (3.5)$$



б) Применим уравнение вращательного движения с учетом теоремы Штейнера точно так же, как это было в задаче №2.

$$\varphi'' = -\frac{mgR\sin\varphi}{I}. \qquad (3.6)$$

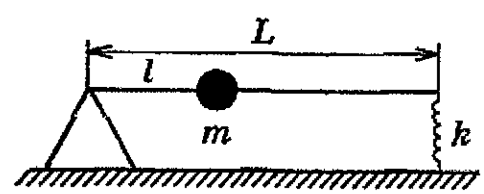
$\sin\varphi \approx \varphi$, I – момент инерции:

$$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2, \qquad (3.7)$$

$$\varphi'' = -\frac{g}{2R}\varphi. \qquad (3.8)$$

Выражение (3.8) совпадает с соотношением (3.3), а значит, период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \qquad (3.9)$$



4. Невесомая штанга длиной L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину жесткостью k. Определите период малых колебаний штанги в зависимости от положения l на ней грузика массой m.

Применим лишь "энергетический" метод. Обозначим через x_1 смещение пружинки по вертикали, а через x_2 – смещение тела массой m по вертикали. Очевидно, что

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{L}{l}, \quad x_1 = \frac{L}{l}x_2. \qquad (4.1)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kx_1^2}{2}=\text{const}. \qquad (4.2)$$

Подставим (4.1) в (4.2):

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{k}{2}\cdot\frac{L^2}{l^2}x_2^2=\text{const}. \qquad (4.3)$$

Производная по времени дает уравнение движения

$$x''=-\frac{kL^2}{ml^2}x. \qquad (4.4)$$

Выразим циклическую частоту и период колебаний

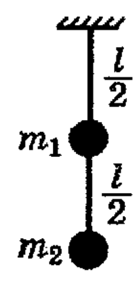
$$\omega_0=\frac{L}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (4.5)$$

$$T=2\pi\frac{l}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (4.6)$$

Таким образом, при нахождении периода или частоты колебаний механических систем мы вправе применять оба метода.

В заключение приведем несколько задач для самостоятельного решения:

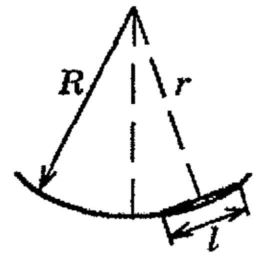
1. Жесткий стержень с прикрепленными к нему шариками шарнирно подвешен за конец и совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Определите период колебаний, если длина стержня l, а массы шариков m_1 и m_2 соответственно. Массой стержня пренебречь, трение в шарнире отсутствует.



Ответ:

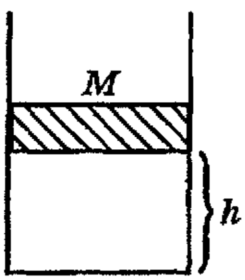
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l(4m_2+m_1)}{2g(2m_2+m_1)}}.$$

2. Внутри неподвижной сферической чашки радиусом R может двигаться тонкий однородный стержень длиной $l \ll 2R$ и массой m так, что он остается в вертикальной плоскости, проходящей через центр сферы. Если пренебречь трением, то стержень совершает незатухающие колебания. Определите их частоту.



Ответ: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}}{R^2 - \frac{1}{6}l^2}}.$$

3. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде площадью S может перемещаться без трения массивный поршень массой M. Сосуд заполнен газом. В положении равновесия расстояние между поршнем и дном сосуда равно h. Определите период малых колебаний, которые возникают при отклонении поршня из положения равновесия. Атмосферное давление равно p_0, газ идеальный, температура постоянная.



Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mh}{p_0S + Mg}}.$$

4. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет электрический заряд $+Q$. Как будет двигаться точечное тело массой m, имеющее заряд $(-q)$, если в начальный момент времени оно покоилось в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $x \ll R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}{|q|\cdot|Q|}}.$$

5. Два отрицательных точечных заряда величиной $(-q)$ каждый расположены симметрично относительно нити на расстоянии r от нее. По нити может скользить без трения небольшая бусинка массой M и зарядом Q. Найдите период малых колебаний бусинки вдоль нити.

Ответ: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 r m}{|q|\cdot|Q|}}.$$